Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

№1

Пусть производительность работы Сорокиной и Федора равны $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{r}$ соответственно, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1}{9} \\ \frac{1}{r}+\frac{1}{a}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{r}+\frac{1}{c}=\frac{1}{18} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{1}{a} \\ \frac{1}{r}+\frac{1}{a}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{9}-\frac{1}{a}+\frac{1}{r}=\frac{1}{18} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{12}-\frac{1}{r} \\ \frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=\frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{12}-\frac{1}{r} \\ \frac{2}{r}=\frac{1}{18}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12} \end{cases} \Big| \cdot 36 \quad \begin{cases} \frac{72}{r}=2-4+3 \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{12}-\frac{1}{r} \\ \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{1}{a} \end{cases} \Big| \cdot r \quad \begin{cases} r=72 \\ \frac{1}{a}=\frac{6}{72}-\frac{1}{72} \\ \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} r=72 \\ \frac{1}{a}=\frac{5}{72} \Big| \cdot 72a \\ \frac{1}{c}=\frac{1}{9}-\frac{5}{72} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=72 \\ 5a=72 \\ \frac{1}{c}=\frac{8}{72}-\frac{5}{72} \end{cases} \quad \begin{cases} r=72 \\ a=14,4 \\ \frac{1}{c}=\frac{3}{72} \end{cases} \quad \begin{cases} r=72 \\ a=14,4 \\ 3c=72 \end{cases} \quad \begin{cases} r=72 \\ a=14,4 \\ c=24 \end{cases}$$

$144 \mid 18$ -144 0 ; $144 \mid 24$ 144 0 6

Втроем сделают $\frac{1}{72}+\frac{1}{14,4}+\frac{1}{24}=\frac{2}{144}+\frac{10}{144}+\frac{6}{144}=\frac{18}{144}=\frac{1}{8}$,

за 8 минут Оля сделает 0,5 ки машины, тогда для ки сделают за $8 \cdot 2 = 16$ минут Ответ: 16 минут

Можно использовать оборот листа для записи решений

№2

$(y-2)(3x-12)=5x^2-21x+4$

$3(x-4)(y-2)=5(x-4)(x-0,2)$

$3(x-4)(y-2)-5(x-4)(x-0,2)=0$

$(x-4)(3(y-2)-5(x-0,2)=0$

$(x-4)(3y-6-5x+1)=0$

$(x-4)(3y-5x-5)=0$

$x-4=0$ $\quad$ $3y-5x-5=0 \mid :5$

$x=4$ $\quad$ $0,6y-x=1$

при $x=4$ и $y\in(-\infty;+\infty)$ $\quad$ $0,6y=x+1 \mid :0,6$

ответ всегда будет 0 $\quad$ $y=\frac{x}{0,6}+\frac{1}{0,6}$

$y=\frac{10x}{6}+\frac{10}{6}$

$y=\frac{5x+5}{3}$, если подставлять числа, то увеличение числа x на 6 единиц приводит к увеличению y на 5 единиц

Ответ: при $x=4$ и $y\in(-\infty;+\infty)$

а при $y=\frac{5x+5}{3}$ ответ будет кратен 6.

$21 \times 21 = 441$

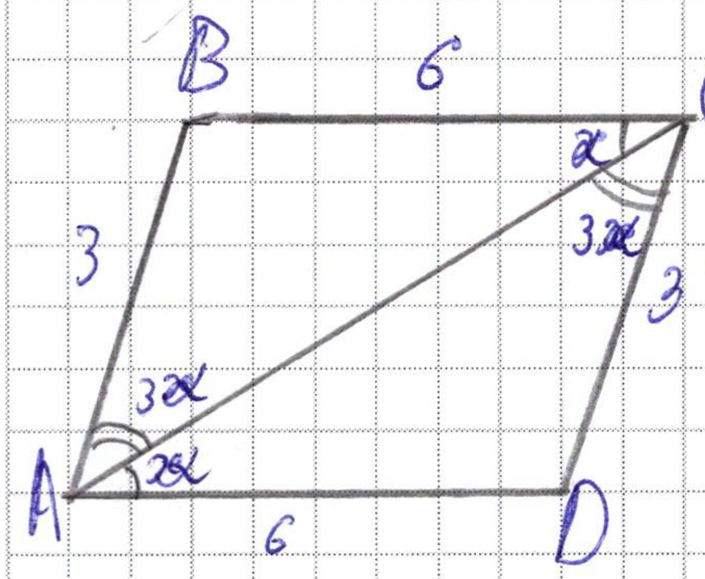
$5x^2-21x+4=0$

$D=(-21)^2-4\cdot4\cdot5=361=19^2$

$x_1=\frac{21-19}{5\cdot2}=\frac{2}{10}=0,2$

$x_2=\frac{21+19}{5\cdot2}=\frac{40}{10}=4$

№3



Дано: $ABCD$ - пар-мм, $AB=CD=3$ см, $BC=AD=6$ см

Найти: S_{ABCD}

Решение: т.к. $\angle A$ делится лучом в отношении 1:3, то пусть $\angle CAD=\angle BCA=\alpha$ - накр. леж. углы, тогда $\angle BAC=\angle ACD=3\alpha$ - накрест леж. углы, то по теореме пар-мма сумма прилежащих углов равна 180°, то $(\alpha+3\alpha)+\alpha=180°$

$4\alpha=90°$

$\alpha=22,5°$

$90 \mid 4$
$-8 \quad 22,5$
10
-8
20
-20
0

olymp.bmstu.ru

$|x-1| = a^2+1$, т.к. в условии задачи требуется только отрицательное, рассмотрим только случай при $x<1$, но и при $x \geq 1$

$-(x-1) = a^2+1$

$-x+1 = a^2+1$

$a^2 = -x$

при $0<x<1$ нет решения

$a^2(x) = -x$

$x-1 = a^2+1$

$x-2 = a^2$

$a^2(x) = x-2$

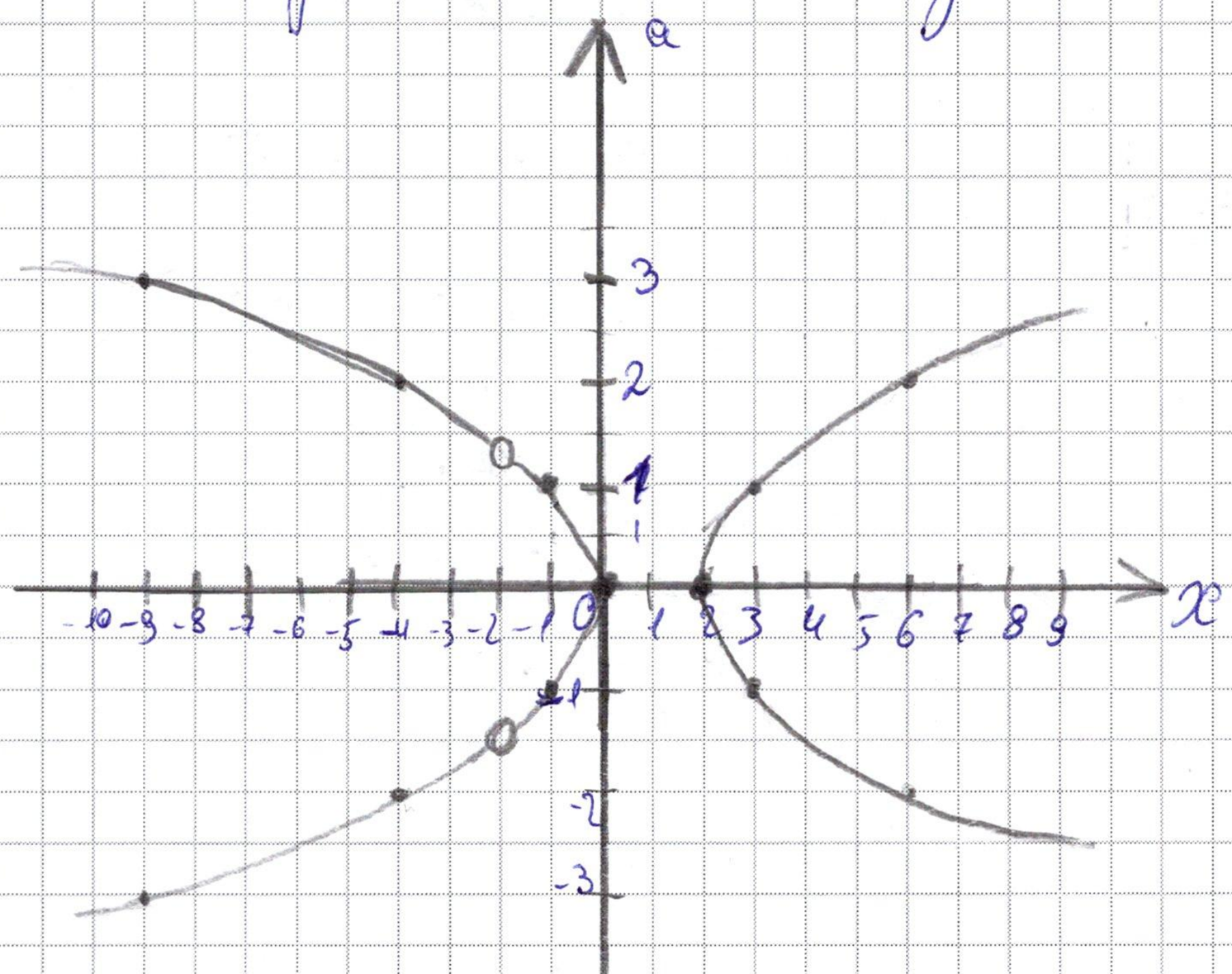
при $1 \leq x < 2$ нет решения

$a^2(x) = x-2$

x	-1	-4	-9	0	3	6	2
$0 \leq a$	1	2	3	0	1	2	0
$0 > a$	-1	-2	-3	0	-1	-2	0

– этот график-парабола

Итог: при $0<x<2$ - нет решения, при $x=-2$ нет решения (0;3)



Далее выражение находится в отрицательном числе поэтому подходит только неотрицательное

$$\left| \frac{x(x^2-3)+(x+2)^2-(x^3+6}{x+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2}}-1} \right| \geq 0$$

Ответ: нет решения.

15

$\Rightarrow$ Увидим, что $\angle BCD = 4\alpha = 90$, тогда $ABCD$ - прямоугольник ($\angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \angle ABC = 90°$ - углы одинаковых углов), тогда

$S = 6 \cdot 3 = 18\ см^2$

Ответ: $S = 18\ см^2$

$$\left| \frac{x(x^2-3)+(x+2)^2-(x^3+6)}{x+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}-1} \right| = a^2+1$$

$$\left| \frac{x^3-3x+x^2+4x+4-x^3-6}{x+\sqrt{9}-1} \right| = a^2+1$$

$$\left| \frac{x^2+x-2}{x+\sqrt{9}-1} \right| = a^2+1$$

$D = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$$\left| \frac{(x+2)(x-1)}{x+\sqrt{9}-1} \right| = a^2+1$$

$$\left| \frac{(x+2)(x-1)}{x+3-1} \right| = a^2+1$$

$$\left| \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} \right| = a^2+1$$

$$|x-1| = a^2+1$$

ОДЗ: ~~$x + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} - 1 \neq 0$~~

~~$D = (\sqrt{\frac{9}{2}})^2 + 4 \cdot 1 \cdot 9 = 4 = 5$~~

~~$x_1 \neq \frac{-\sqrt{9}-\sqrt{5}}{2}$~~

~~$x_2 \neq \frac{-\sqrt{9}+\sqrt{5}}{2}$~~

$x + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} - 1 \neq 0$

$x + \sqrt{\frac{18}{2}} \neq 1$

$x \neq 1 - \sqrt{9}$

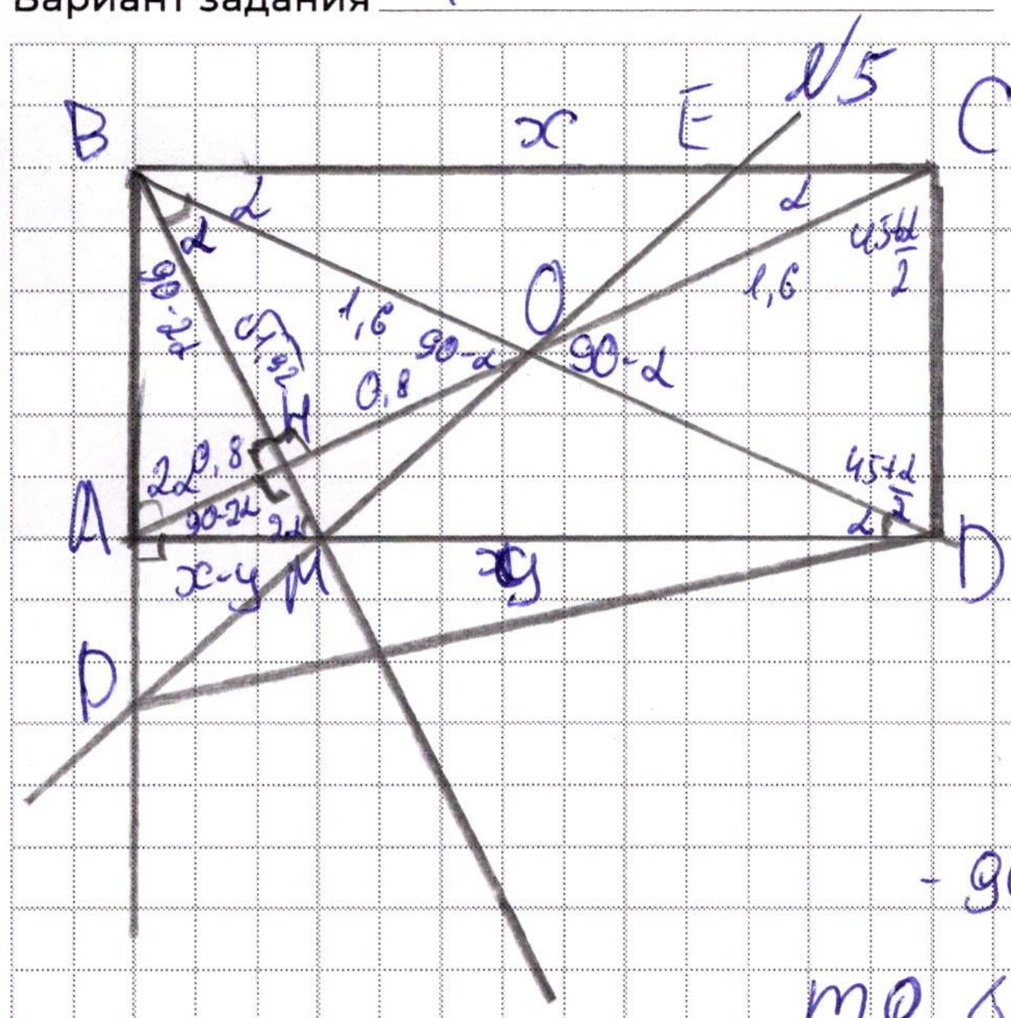
$x \neq 1 - 3$

$x \neq -2$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 1



Дано: $AC = BD = 3,2$, $BH \perp AC$, $BM = MD$

Найти: AH, PD

Решение: $\triangle BMD$ - р/б ($BM = MD$), то $\angle MBD = \angle BDM = \alpha$, то $\angle BMA = 2\alpha$ - внешний угол $\triangle BMD$, $\angle HAM = 180° - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$ $\angle BAH = 90° - (90 - 2\alpha) = 2\alpha$, то $\triangle BAH \sim \triangle MAH$ по I приз. (по двум углам)

$\angle ABH = 180° - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$, $\angle OBC = 90° - (90 - 2\alpha) - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$, по св-ву треугольника, $BO = OC$, то $\triangle BOC$ - р/б, $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, тогда $\triangle MBD \sim \triangle BOC$ по I пр. (по двум углам), в $\triangle BOC$ стороны $BO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$, тогда $BO = OC = 1,6$

Рассмотрим $\triangle BOC$ и $\triangle BMD$, пусть $BC = x$, то $MD = BD = y$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{MD}{BO} = \frac{MB}{OC} \Rightarrow \frac{3,2}{x} = \frac{y}{1,6} = \frac{y}{1,6} \Rightarrow xy = 5,12$$

$\angle BOA = 180° - 2\alpha - (90 - 2\alpha + \alpha) = 180° - 2\alpha - 90 + \alpha = 90 - \alpha = \angle COD$ - вертик.

$\triangle COD$ - р/б (по св-ву треугольника $OC = OD$), то $\angle OCD = \angle ODC = \frac{180° - 90 + \alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$

$\triangle AOD$ - р/б (по св-ву углов, $AO = OD = 1,6$), то $\angle OAD = \angle ODA = \alpha = 90 - 2\alpha$

$90 - 2\alpha = \alpha$

$3\alpha = 90$

$\alpha = 30$, то $BA = \frac{1}{2}BD$ (по св-ву 30°), значит $BA = 1,6$,

Можно использовать оборот листа для записи решений

$\angle BAH = 60°$, $\angle ABH = 30°$, по св-ву $30°$ $AH = \frac{1}{2}BA = 0,8$

Ответ: $AH = 0,8$

Заметим что $AH = HO = 0,8$, то $\triangle ABO$ - р/б

$BH = 1,6^2 - 0,8^2 = \sqrt{1,92}$

$\angle HAM = 30°$, то $\triangle BDP$ - р/б, то $BD = PD = 3,2$ ($BA = AP$, $AD_1 \parallel BP$)

Ответ: $AH = 0,8$; $PD = 3,2$

